

Kann man messen, ob eine Zahl rational ist? – Ausbreitung und Spektrum in einem einfachen Quantensystem*

REINHARD F. WERNER

Institut für Theoretische Physik, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
Appelstraße 2, D-30167 Hannover

Wir betrachten die Dynamik eines einfachen Quantensystems: ein Atom in einem optischen Gitter, dass sich in diskreten Schritten unter Wahrung der quantenmechanischen Kohärenz in einem äußeren Feld bewegt. Das Langzeitverhalten eines solchen Systems hängt dramatisch davon ab, ob das Feld ein rationales oder irrationales Vielfaches von 2π ist. In der Tat sieht man diesen qualitativen Unterschied auch im Experiment. Andererseits ist natürlich klar, dass ein experimenteller Parameter nur mit endlicher Genauigkeit eingestellt werden kann, der Unterschied zwischen rational und irrational also nie experimentell festgestellt werden kann.

Im Vortrag wird dieses Paradoxon aufgelöst durch eine Abschätzung der Empfindlichkeit, mit der Erwartungswerte zu endlichen Zeiten vom Feldparameter abhängen. Dabei stellt sich als entscheidendes Hilfsmittel die Kettenbruchentwicklung des Feldparameters heraus. An dieser Entwicklung kann man direkt die Qualität rationaler Approximationen ablesen, die dann Vorhersagen auf verschiedenen Zeitskalen möglich machen. Wir erhalten dadurch drei Klassen asymptotischen Verhaltens, die jeweils einem Spektraltyp (Punktspektrum, absolut stetiges Spektrum oder singulär stetiges Spektrum) entsprechen. Diese Typen lassen sich nur im Langzeitlimes, und entsprechend bei unendlich genau bekanntem Feldparameter unterscheiden, und lassen sich am asymptotischen Verhalten der Kettenbruchentwicklung ablesen.

Auf Beweise wird im Vortrag verzichtet und auch die Sätze werden eher qualitativ formuliert. Als allgemeinverständlicher mathematischer Inhalt wird ein wenig auf Kettenbrüche eingegangen, die uns erlauben präzise zu sagen, in welchem Sinn manche Zahlen irrationaler sind als andere.

* Kurzfassung des am 12.04.2013 vor der Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehaltenen Vortrags.